

Задаци - Теорија вероватноћа

1. Дата је квадратна једначина

$$x^2 - bx + c = 0. \quad (1)$$

(а) Нека је $b = b_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, а c случајна величина са $\mathcal{U}[0, 1]$ расподелом. Нека је догађај A_n задат на следећи начин:

A_n : једначина (1) има реална решења.

Наћи $P(A_n)$ и $P\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right)$.

(б) Нека су b и c независне случајне величине са $\mathcal{U}[-n, n]$ расподелом. Нека је случајна величина X дефинисана на следећи начин:

X је број конјуговано-комплексних решења једначине (1).

Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине X .

2. (а) Нека је X случајна величина, која са позитивном вероватноћом узима позитивне вредности. Доказати да постоји $\delta > 0$, тако да важи $P\{X \geq \delta\} > 0$.

(б) Нека су $\delta, \varepsilon > 0$ и нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ ненегативних независних случајних величина, тако да је $P\{X_i \geq \delta\} > \varepsilon$, за свако $i \in \mathbb{N}$. Одредити са којом вероватноћом се реализује догађај $\sum_{i=1}^{+\infty} X_i = +\infty$.

3. (а) За које $c \in \mathbb{R}$ функција задата са

$$f(x, y) = \begin{cases} c|xy|, & (x, y) \in D_1 \cap D_2 \\ 0, & (x, y) \notin D_1 \cap D_2 \end{cases}$$

где је

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x| - 1)^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (|y| - 1)^2 \leq 1\}$$

може бити густина расподеле случајног вектора (X, Y) ?

(б) Нека је (X, Y) случајни вектор са $\mathcal{U}([-1, 1] \times [-1, 1])$ расподелом и нека је D_n догађај задат са

$$D_n : \left(|X| - \frac{1}{n}\right)^2 + Y^2 \leq \frac{1}{n^2}, X^2 + \left(|Y| - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$$

израчунати $P(D_n)$ и $P\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} D_n\right)$.